PRE-PUBLICACIONES del seminario matematico "garcia de galdeano"

2003

# La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión

Eva Cid

n. 25

seminario matemático
garcía de galdeano
Universidad de Zaragoza

# La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión

**Eva Cid**
**Departamento de Matemáticas**
**Universidad de Zaragoza**

## 1. Introducción

La bibliografía didáctica sobre los números negativos se puede agrupar en tres grandes áreas:

- propuestas de enseñanza,
- dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos, e
- implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo.

Naturalmente, estas áreas no son independientes entre sí y, de hecho, existen trabajos que relacionan las dificultades de aprendizaje con las propuestas de enseñanza, la epistemología de los números negativos con los errores que cometen los alumnos, etc. Sin embargo, se observa que un número importante de artículos se ocupa de una de estas áreas sin apenas referencias a las otras dos.

Se trata, por otro lado, de una bibliografía abarcable por una sola persona (alredededor de 200 trabajos, entre artículos y capítulos de libro, supuesto que nos limitemos a los idiomas inglés, francés y español y a los años posteriores a 1950), pero de difícil integración porque son aportaciones debidas a autores de diversa procedencia (profesores de matemáticas, investigadores en didáctica de las matemáticas, etc.) y con objetivos muy diferentes (comunicar experiencias de clase, dar su opinión sobre la docencia, investigar fenómenos didácticos, poner a punto determinadas herramientas teóricas de la didáctica de las matemáticas, etc.). Además, las afirmaciones que se hacen en dichos trabajos tienen un estatuto muy variado: desde simples opiniones a asertos basados en la experiencia docente o contrastados por algún tipo de validación científica realizada, en este último caso, desde marcos teóricos muy diferentes. Todo esto hace que las conclusiones de unos y otros autores sean difícilmente integrables en una cuerpo teórico común e, incluso, nos encontremos con afirmaciones contradictorias que coexisten sin que, hasta el momento, nadie se haya tomado el trabajo de rebatirlas.

## 2. Las propuestas de enseñanza de los números enteros

De entre las tres áreas a las que nos hemos referido en el apartado anterior, la que cuenta con mayor número de publicaciones es la referente a las propuestas de enseñanza de los números enteros[1]. Arcavi y Bruckheimer (1981) hacen una clasificación de las distintas propuestas de introducción de la multiplicación de los números enteros en la escuela que puede hacerse extensiva a la estructura aditiva y que es un buen punto de partida para ordenar la bibliografía existente. La clasificación, con alguna modificación terminológica por nuestra parte, es la siguiente:

*Introducción inductiva.* Se caracteriza por el descubrimiento y generalización de regularidades. Por ejemplo, se presentan a los alumnos secuencias como las siguientes:

$$\begin{array}{ll} 5 - 3 = 2 & 4 \cdot 3 = 12 \\ 5 - 2 = 3 & 4 \cdot 2 = 8 \\ 5 - 1 = 4 & 4 \cdot 1 = 4 \\ 5 - 0 = 5 & 4 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

y después se les pide que continúen estableciendo resultados como:

$$\begin{array}{ll} 5 - (-1) = 6 & 4 \cdot (-1) = -4 \\ 5 - (-2) = 7 & 4 \cdot (-2) = -8 \\ 5 - (-3) = 8 & 4 \cdot (-3) = -12 \end{array}$$

Otra variante de este método se basa en realizar representaciones gráficas y algebraicas de la función afín en el primer cuadrante y prolongarlas a otros cuadrantes.

*Introducción deductiva.* Consiste en añadir a los números naturales sus simétricos respecto a la suma y definir las operaciones en ese nuevo conjunto numérico de manera que se conserve la estructura algebraica de los números naturales, es decir, las propiedades asociativa y conmutativa de suma y producto, la propiedad distributiva y la compatibilidad

[1] Nos referimos a los números enteros y no a los números negativos porque casi todos los autores –las excepciones las comentaremos más adelante– identifican la enseñanza de los números negativos con la de los números enteros.

entre el orden y las operaciones. Esta exigencia es la que, históricamente, se conoce como 'principio de permanencia de las leyes formales de la aritmética'.

*Introducción constructiva.* Se basa en la simetrización del conjunto de los números naturales respecto a la suma, construyendo los enteros como conjunto cociente de pares ordenados de naturales respecto a la relación de equivalencia: (a,b) equivalente a (a',b') si, y sólo si, a+b'=b+a'. Posteriormente se define la suma, el producto y el orden de dicho conjunto cociente y se deduce la estructura de anillo totalmente ordenado.

*Introducción por medio de modelos.* Es una presentación de los números enteros basada en su similitud con otros sistemas de objetos que son familiares a los alumnos o que les pueden resultar más atractivos. Se supone que éstos, a partir de su experiencia con el modelo, pueden conjeturar o, al menos, justificar, "dar sentido", a sus reglas de funcionamiento y, posteriormente, por analogía, extenderlas al conjunto de los números enteros. También se les atribuye una función de recuerdo, pues se espera que, en caso de olvido de las reglas de cálculo, el alumno pueda reconstruirlas con ayuda del modelo. Estos modelos han recibido distintos nombres: 'modelos físicos', 'modelos intuitivos', 'modelos concretos' (que es el nombre que usaremos nosotros), etc. Es además muy frecuente que se presenten a través de juegos colectivos, estrategia que sirve para motivar la reflexión sobre el modelo y sus leyes.

De entre las introducciones de tipo axiomático, la introducción constructiva, que es la que suele aparecer en los libros de texto universitarios, tuvo su auge en los años sesenta-setenta en relación con el movimiento de introducción de la "matemática moderna" en la escuela. Coltharp (1966) y Fletcher (1976), entre otros, defendieron en su momento esta forma de presentar los enteros en la educación primaria o secundaria, encuadrándola en dicho movimiento. Hoy en día, ha caído en desuso en los niveles educativos no universitarios.

La otra posible introducción axiomática, la introducción deductiva, se sigue utilizando en los distintos niveles educativos, aunque en las etapas iniciales de enseñanza de los números negativos los razonamientos basados en el principio de permanencia de las leyes formales suelen hacerse utilizando números en vez de letras. Por ejemplo, se sugieren justificaciones como la siguiente: sabiendo que 3+(-3)=0 y que (-4)·3=-12, tendremos que (-4)(3+(-3))=(-4)·0=0 y, por tanto, teniendo en cuenta que debe seguir cumpliéndose la propiedad distributiva, (-4)·3+(-4)(-3)=0, o también, -12+(-4)(-3)=0, de donde se deduce que (-4)(-3)=12.

Partidarios de este tipo de introducción son, entre otros: Klein (1927, pp. 24-32), Snell (1970), Phillips (1971), Freudenthal (1983) y Milazzo y Vacirca (1983), si bien algunos creen necesario empezar proponiendo modelos concretos o secuencias inductivas como paso previo a la exposición deductiva. Además, Freudenthal (1983, pp. 432-460) considera que, aun cuando es evidente que los números negativos nacieron en el ámbito del álgebra, en particular, de la resolución de ecuaciones, la responsable de su éxito final fue la geometría analítica. Según él:

> La necesidad de validez general de los métodos de resolución de ecuaciones, a la cual deben su existencia los números negativos, se vio reforzada, desde el siglo XVII en adelante, por la necesidad de validez general de las descripciones [algebraicas] de las relaciones geométricas. Esta segunda necesidad, más profunda que la formal algebraica, es la más natural y convincente. Es la auténtica responsable del éxito histórico de los números negativos (y también del de los complejos). (Freudenthal, 1983, p. 433)

Como consecuencia, deduce que la enseñanza de los negativos debe fundamentarse no sólo en el ya citado principio de permanencia de las leyes formales, sino también en un principio de permanencia geométrico-algebraico que es el que permite que una sola fórmula algebraica represente la totalidad de una curva, independientemente de los cuadrantes que atraviese.

Entre los que comentan la introducción inductiva se encuentran: Snell (1970), Peterson (1972), Sicklick (1975) y Freudenthal (1983). Para Freudenthal, una introducción de este tipo facilitaría el paso a un posterior desarrollo deductivo del tema. Además, en consonancia con su idea de basar los razonamientos sobre los números negativos no sólo en aspectos algebraicos sino también geométricos, propone una presentación inductiva con una doble vertiente: la de prolongar, por un lado, las regularidades numéricas propias de los números naturales y, por otro, las rectas e hipérbolas equiláteras restringidas, inicialmente, al primer cuadrante (Freudenthal, 1983, pp. 450-55).

Ahora bien, la existencia de autores que hacen propuestas de enseñanza de los números negativos de tipo inductivo, deductivo o constructivo, no debe hacernos perder de vista el hecho de que, hoy en día, la práctica totalidad de los mismos se decanta por una introducción por medio de modelos concretos y dedica sus esfuerzos a buscar estos modelos y a investigar los efectos que producen en los alumnos. Este tipo de introducción es también la más habitual en los actuales libros de texto escolares.

## 3. Los modelos concretos en la enseñanza de los números enteros

La profusión de modelos concretos propuestos para enseñar los números enteros es tanta que cualquier descripción de los mismos obliga a recurrir a algún tipo de clasificación que simplifique la tarea. En este sentido, la clasificación hecha por Janvier (1983), en la que distingue tres tipos de modelo: el del equilibrio, el de la recta numérica y el híbrido, es un buen punto de partida. Esta clasificación ha sido parcialmente modificada por Cid (2002) que no tiene en cuenta el modelo híbrido por considerar que los ejemplos existentes pueden también incluirse en una de las otras dos clases y prefiere llamar 'modelo de neutralización' al modelo del equilibrio definido por Janvier porque entiende que dicho nombre refleja mejor la idea central de este tipo de modelos: la existencia de entidades opuestas que se neutralizan entre sí. Utiliza también el término de 'modelo del desplazamiento' en lugar del nombre propuesto por Janvier: 'modelo de la recta numérica', porque considera este último como un caso particular del primero, aunque, eso sí, muy significativo.

La distinción entre modelos de neutralización y de desplazamiento viene dada por el significado que en ellos se atribuye a las distintas valencias[2] de los signos 'más' y 'menos'. En los modelos de neutralización los signos predicativos se refieren a medidas de cantidades de magnitud de sentidos opuestos que se neutralizan entre sí; mientras que los signos operativos binarios y unarios se identifican con acciones de añadir, reunir, quitar, separar, etc. Por ejemplo, en el modelo de fichas de dos colores la suma de números enteros se interpreta como una reunión de fichas, o bien como una acción de añadir fichas a un conjunto dado de ellas, seguida del correspondiente proceso de neutralización para obtener la representación canónica del resultado. La resta se relaciona con la acción de quitar o separar fichas y el producto diciendo, por ejemplo, que (-a)(-b) significa "quitar, en ausencia de fichas, *a* veces *b* fichas de un cierto color (el asociado a los enteros negativos)". En cuanto a la justificación del orden de los números enteros, exige la introducción de una valoración moral que establezca que el sentido positivo es "mejor" que el negativo. Por ejemplo: es mejor tener fichas rojas que azules, es mejor tener haberes que tener deudas, es mejor tener puntos positivos que negativos, etc.

En la bibliografía sobre la enseñanza de los enteros se proponen muchos modelos de neutralización: fichas o bloques de dos colores (Freudenthal, 1983, pp. 438-441; Semadeni, 1984; Chang, 1985; Rossini, 1986; Moro y Salazar, 1993; Gallardo, 1994; Soria, 1997), bolas que se ensartan en dos varillas distintas (Bartolini, 1976), deudas y

[2] Entendemos que los signos 'más' y 'menos' tienen tres valencias: son signos 'predicativos' cuando indican la "positividad" o "negatividad" del número, 'operativos binarios' cuando representan las operaciones binarias de suma o resta, y 'operativos

haberes o pérdidas y ganancias (Puig Adam, 1956, pp.45-46; Malpas, 1975; Grup Cero, 1980; Chang, 1985; Bell, 1986; Liebeck, 1990; Tulej y Gorman, 1990; Sasaki, 1993; Souza y otros, 1995; Baldino, 1996), ejércitos que se enfrentan cuerpo a cuerpo (Papy, 1968, pp. 112-148; Rowland, 1982), cargas eléctricas positivas o negativas (Cotter, 1969; Peterson, 1972; Kohn, 1978, Battista, 1983), sumandos y sustraendos, acciones de añadir o quitar u operadores aditivos (Spagnolo, 1986; Davidson, 1987; Souza y otros, 1995; Baldino, 1996; Davis y Maher, 1997), juegos o clasificaciones con puntuaciones positivas o negativas (Frank, 1969; Milne, 1969; Bell, 1986), clavijas con tres posiciones (Gardner, 1977), estimaciones con errores por exceso o defecto (Cable, 1971), seres u objetos que pueden estar valorados positiva o negativamente, entrando o saliendo de un recinto (Dubisch, 1971; Sarver, 1986; Linchevski y Willams, 1999; Streefland, 1996) cubitos que calientan o enfrian un líquido (Jencks y Peck, 1977), balones de helio y sacos de arena que elevan o bajan un globo (Luth, 1967), fichas de dominó en las que los puntos situados en una de las partes de la ficha neutralizan a los situados en la otra parte (Galbraith, 1974), etc.

Los modelos de neutralización más usados en los actuales libros de texto de la Educación Secundaria son: deudas y haberes complementado con pérdidas y ganancias, puntuaciones positivas o negativas y, por último, personas que suben o bajan de un medio de locomoción o entran o salen de un recinto. A veces, se incorpora al modelo de deudas y haberes un concepto de pérdida o ganancia por unidad de tiempo. De esa manera, uno de los términos del producto indica la pérdida o ganancia por unidad de tiempo y el otro el número de unidades de tiempo pasado o futuro a considerar, mientras que el resultado es la pérdida o ganancia total. Esto mismo se hace también con el modelo de personas que entran y salen de un recinto, introduciendo la noción de entradas o salidas por unidad de tiempo.

En los modelos de desplazamiento los signos predicativos indican posiciones en torno a un origen o desplazamientos en sentidos opuestos; los signos operativos binarios, composición de desplazamientos o desplazamiento desde una posición a otra; y los signos operativos unarios, mantenimiento o cambio del sentido de desplazamiento. Si, por ejemplo, utilizamos un modelo de fichas que recorren un camino que se extiende a derecha e izquierda de una posición inicial, la suma de números enteros se justifica, bien como un desplazamiento aplicado a una posición para obtener otra posición, bien como una composición de desplazamientos que da como resultado otro desplazamiento, bien como una composición de desplazamientos que se aplica a una ficha situada en la casilla cero y da como resultado la nueva posición de la ficha. La resta significa la operación

unarios' cuando indica la operación unaria que afecta al sentido –positivo o negativo– del número, manteniéndolo o transformándolo en el sentido opuesto.

inversa de cualquiera de las anteriores y el producto una composición repetida de desplazamientos para obtener un desplazamiento resultante, al que se le cambia o no de sentido según que el entero que indica la repetición sea negativo o positivo, o la nueva posición de una ficha situada inicialmente en la casilla cero a la que se le aplica una composición repetida de desplazamientos. En cuanto al orden, se justifica interpretando los números enteros en términos de posiciones y diciendo que un número entero es menor que otro si, utilizando el sentido de recorrido definido como positivo, la posición que representa al primer número es anterior a la correspondiente al segundo número.

Dentro de los modelos de desplazamiento nos encontramos con las siguientes propuestas: personajes u objetos que avanzan o retroceden a lo largo de un camino (Hollis, 1967; NCTM, 1970; Ettline y Smith, 1978; Alsina y otros, 1980; Chang, 1985; Chilvers, 1985; Crowley y Dunn, 1985; Davidson, 1987; Thompson y Dreyfus, 1988; Aze, 1989; Whiffing, 1989; McAuley, 1990; Tulej y Gorman, 1990; Sánchez Olmedo, 1991; Whitman, 1992; Cemen, 1993; Sasaki, 1993; Souza y otros, 1995; Baldino, 1996), peldaños que se suben o bajan (Skemp, 1980, pp. 210-216; González Alba y otros, 1989), termómetros o escalas de diversas magnitudes (Cable, 1971; Grup Cero, 1980; Bell, 1986; Sasaki, 1993; Strefland, 1996), ascensores que bajan a los garajes o suben a los pisos (Puig Adam, 1956, pp. 46-47; Alsina y otros, 1980; Grup Cero, 1980; Gadanidis, 1994), globos que se elevan o que se hunden por debajo del nivel del mar (Petri, 1986), cintas de video que se proyectan o rebobinan (Peterson, 1972; Cooke, 1993), variaciones en el nivel de agua de un depósito (Alsina y otros, 1980), desplazamientos representados por vectores unidireccionales que actúan sobre posiciones (puntos) de la recta numérica (Havenhill, 1969; Alsina y otros, 1980; Freudenthal, 1983, pp. 441-445; Hativa y Cohen, 1995), etc.

Algunos autores, para justificar el producto de enteros, añaden a este último modelo, es decir, al de la recta numérica, dispositivos gráficos parecidos a los que suelen utilizarse para explicar las homotecias de razón entera (Cable, 1971; Cofman, 1981; Dieudonné, 1987, pp. 57-59). También hay autores que interpretan el producto ‘ab’ de números enteros como el área del rectángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (a,b), (a,0), (0,b) y (0,0), acompañada del signo ‘+’ o ‘-’ según el cuadrante en que esté situado (Castelnuovo, 1970, pp. 160-163, Alsina y otros, 1980; Gobin y otros, 1996).

Los modelos de desplazamiento más habituales en los libros de texto de la actual Educación Secundaria son, inicialmente: el termómetro, avances o retrocesos a lo largo de un camino, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, ascensores o escaleras que se suben o bajan y años antes y después de Cristo, para desembocar, después de exponer uno o varios de estos modelos, en el de la recta numérica y los desplazamientos sobre ella.

### 4. Características generales de la bibliografía sobre los modelos concretos

La primera característica que llama la atención es que nos encontramos, básicamente, ante una literatura de tipo apologético en la que, después de describir someramente algunos de los problemas que se observan en la enseñanza habitual de los números negativos, se presenta un nuevo modelo concreto, o bien una nueva versión de uno ya conocido, asegurando que su utilización resuelve dichos problemas, afirmación que suele hacerse sin el respaldo de un trabajo experimental que la justifique. Existen, desde luego, artículos en los que se critica algún modelo concreto, pero son los menos y, con mucha frecuencia, esta crítica es el preámbulo que justifica la presentación de otro modelo o de alguna variación del inicial que, a juicio del autor, no tiene los inconvenientes reseñados.

También se advierte que muchas de las propuestas didácticas son incompletas, bien porque contemplan sólo la estructura aditiva de los números enteros, que son con mucho las aportaciones más numerosas, bien porque se ocupan solamente de la estructura multiplicativa, dando por supuesto que el alumno ya conoce la estructura aditiva de **Z**. Además, la mayor parte de las propuestas obvian la estructura ordinal de **Z** y los pocos que se refieren a ella, lo hacen, en general, de manera bastante superficial.

Otro aspecto a considerar es que los libros de texto no se ciñen a un único modelo para introducir los números enteros, sino que presentan sucesivos modelos, unos de neutralización y otros de desplazamiento y usan, en cada momento de la exposición, el que consideran más adecuado. Este eclecticismo de los libros de texto lo comparten muchos autores que optan por proponer modelos distintos según que se trate de introducir una u otra de las operaciones. Así, es bastante frecuente proponer uno o varios modelos de neutralización para introducir la estructura aditiva de los enteros y otros de desplazamiento para la estructura multiplicativa.

Además, hay que puntualizar que son muy pocos los autores que, una vez introducida la noción de número entero a través de uno o varios modelos concretos, se plantean la necesidad de un proceso de formalización, de descontextualización de la noción inicialmente aprendida. Incluso algunos no parecen distinguir entre el conocimiento del modelo y el conocimiento de la noción matemática y aseguran, por ejemplo, que un alumno “ha aprendido” la suma y la resta de números enteros, simplemente, por haber desarrollado cierta habilidad en el manejo de fichas de dos colores que se neutralizan entre ellas. Entre los que hacen alguna referencia explícita, aunque breve, a la necesidad de descontextualizar el conocimiento inicial para pasar a una concepción de número entero más abstracto están Vargas-Machuca y otros (1990), González Marí (1995), Baldino (1996) y Bruno (1997).

Por último, queda por comentar que casi ningún autor discute la posición de los números negativos en el currículo escolar, ni si deben introducirse a partir de los enteros. De hecho, incluso aunque hablen de la enseñanza de los números negativos, sus propuestas, en la práctica, restringen esa negatividad al ámbito de los números enteros. Freudenthal es una de las excepciones, pues al plantear, como veremos más adelante, la posibilidad de introducir los números negativos en el marco de la geometría analítica, dice que una de las ventajas de esta introducción sería la de no limitarse a los enteros negativos (Freudenthal, 1983, p. 451). La otra excepción son Bruno y Martinón (Bruno, 1997) que introducen los números negativos simetrizando el conjunto de números positivos que manejan los alumnos. Alegan que no ven la ventaja de empezar simetrizando **N**, pues no ahorra tiempo de enseñanza ni evita dificultades de aprendizaje y, en cambio, supone una ruptura en la secuencia de extensiones numéricas realizadas hasta ese momento. Respecto a la posición en el currículo, Davidson (1987) y Aze (1989) presentan experiencias de introducción de los números negativos a edades más tempranas de las habituales.

## 5. Críticas a los modelos concretos

Existen dos tipos de críticas: las de los que creen que no deberían utilizarse modelos concretos en la introducción escolar de los números enteros y las de los que critican algún modelo sin poner en duda la necesidad de usarlos. Respecto a estas últimas, uno de los modelos más criticados es el de la recta numérica, a pesar de que es el más utilizado en la enseñanza, o quizá por eso. Tanto Brookes (1969) como Cable (1971) ya señalan el hecho de que en ese modelo los números enteros tan pronto se representan por puntos, como por desplazamientos, como por factores escalares, dando lugar a que la suma y el producto de enteros se interpreten en términos de operaciones externas. Más recientemente, diversos autores (Bell, 1982; Bruno y Martinón, 1994; Carr y Katterns, 1984; Ernest, 1985; Küchemann, 1981; Liebeck, 1990; Mukhopadhyay, 1997) han puesto de manifiesto que los niños tienen dificultades para interpretar la suma y resta de números naturales o enteros usando el modelo de la recta numérica. Básicamente, se observa que tienden a representar los números y el resultado de la operación como puntos aislados en la recta, no como vectores, lo que no les permite dar una interpretación de las operaciones en el modelo.

También existen referencias a las dificultades de los alumnos en el uso de otros modelos concretos: Lytle (1994) dice que en el modelo de fichas de dos colores surgen dificultades de interpretación de la resta de números enteros; Gallardo (1994) refleja esa misma dificultad al hacer experiencias de enseñanza con dicho modelo y añade que se producen confusiones entre las estructuras aditiva y multiplicativa de **Z**. También Bell (1986) muestra que hay niños que no saben dibujar correctamente la escala de un termómetro, que cuando tienen que calcular la diferencia entre dos temperaturas efectúan siempre una resta independientemente de los signos de las mismas, que no interpretan adecuadamente la expresión "más abajo" o "más arriba" para calcular la posición de un disco en la "lista de los cuarenta principales" a partir de una primera posición, etc.

La constatación de estos hechos no impide que, en general, los autores de estas críticas continuen mostrándose partidarios de los modelos concretos. Bell, por ejemplo, sigue convencido de que es a través de dichos modelos como deben introducirse los enteros:

> Si los números negativos y las operaciones con ellos han de lograr el concreto status familiar que tienen los positivos, los alumnos necesitan mucha más experiencia en la exploración y manipulación de las situaciones familiares en las que esos números se encuentran. (Bell, 1986, p. 199)

pero, eso sí, proponiendo secuencias didácticas en las que se trabajen detalladamente esos modelos y fomentando una metodología de "enseñanza mediante conflicto" consistente en que el profesor llama la atención de los alumnos sobre las distintas respuestas (una correcta y otras erróneas) que han dado a una misma pregunta, provocando una discusión entre ellos que les ayude a superar los errores cometidos.

Otros autores (Marthe, 1979; Vargas-Machuca y otros, 1990; González Marí, 1995; Bruno y Martinón, 1996) proponen la utilización de las clasificaciones de situaciones aditivas de una sola operación de Vergnaud y Durand (1976) o de Carpenter y Moser (1982) con el objeto de ayudar a los alumnos a superar las dificultades de manipulación de los distintos modelos concretos. En particular, Bruno y Martinón se muestran partidarios del uso de los modelos concretos habituales en los textos escolares, pero presentándolos en situaciones aditivas muy variadas, tanto desde el punto de vista del tipo de situación como del lugar que ocupa la incógnita dentro de ella, y de introducir la recta numérica como un sistema de representación universal de las distintas situaciones y modelos. Sin embargo, opinan que es necesaria una larga secuencia didáctica de familiarización con los otros modelos concretos (temperaturas, deudas y haberes, etc.) para facilitar el uso del modelo de la recta numérica.

En cuanto a Vargas-Machuca y González Marí, también utilizan las clasificaciones de las situaciones aditivas para enriquecer los modelos concretos habituales en la escuela, pero, en este caso, haciendo hincapié en las situaciones de comparación. Para ellos, la clave de la comprensión del número entero está en asumirlo como "medida o cuantificación de comparaciones y transformaciones". Su propuesta pretende familiarizar a los alumnos con situaciones de comparación referidas a distintos modelos concretos que faciliten el paso de un cero absoluto, entendido como símbolo de la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero relativo, entendido como medida convencional que se asigna a una cierta cantidad de magnitud que es término de comparación para muchas otras. Esto, a juicio de los autores, es lo que permite el paso del número natural al 'número entero contextualizado'[3].

Por último, las investigaciones de González Marí (1995) muestran que el orden que inducen los modelos concretos no es el de los números enteros: mientras en **Z** se define un orden total, los modelos concretos inducen dos ordenes parciales y opuestos referidos a las regiones positiva y negativa. Por estas y otras razones didácticas, se plantea la construcción de un nuevo objeto matemático, el 'número natural relativo'. Dicho número que, según el autor, refleja mejor el comportamiento de los modelos, ocuparía una posición intermedia entre el número natural y el entero. Así pues, según esta propuesta, el trabajo en la escuela con situaciones aditivas de comparación conduciría a la noción de 'número natural relativo' desde la cual, más adelante, habría que pasar a la de número entero.

## 6. Críticas a la introducción escolar de los números enteros por medio de modelos concretos

Aun cuando actualmente parece haber una rara unanimidad en la necesidad de usar modelos concretos en la introducción escolar de los números enteros, siempre ha habido autores que han manifestado sus dudas al respecto. Freudenthal, por ejemplo, comenta (1973, pp. 279-282) que, en los inicios de la enseñanza de los conceptos numéricos, es pertinente la utilización de estos modelos ('método intuitivo'), pero que este tipo de enseñanza no se puede prolongar indefinidamente, pues a la larga la intuición puede convertirse en una rémora para el alumno. Considera, por tanto, que la introducción del número negativo es el momento adecuado para sustituir el método intuitivo por uno de tipo inductivo que preludie lo que más adelante será un proceso deductivo ('método racional'). Coincide con Klein (1927, p. 25) en que el número negativo es la primera noción matemática de la enseñanza elemental cuya génesis histórica no se produjo por una

[3] Uno de los ejemplos que utilizan es el de las puntuaciones en el juego de golf. Mientras se habla del número de golpes que ha necesitado cada jugador para hacer un hoyo estamos en el ámbito de los números naturales. Cuando se da el valor cero al número de golpes que constituye la moda de la distribución y se empieza a hablar de número de golpes bajo par o sobre par estamos en el ámbito de los 'números enteros contextualizados'.

necesidad de modelizar el mundo físico o social, que la aparición de los números negativos en la escuela es el primer "paso de la matemática práctica a la matemática formal" y que, por consiguiente, el tratamiento didáctico que se le dé debe ser consecuente con estas ideas.

También Brown (1969) se muestra contrario al uso de modelos en general, diciendo que normalmente éstos no son isomorfos al sistema numérico que modelizan lo que implica que determinados teoremas que se cumplen en el modelo pueden no ser válidos en el sistema, creando la consiguiente confusión en los alumnos.

Nos encontramos además con las reticencias de Human y Murray (1987) al uso de modelos concretos, basadas en que sus experiencias sobre las estrategias espontáneas de los niños en la realización de operaciones con números negativos, muestran que no utilizan estos modelos. Los niños, antes de recibir enseñanza sobre el tema, tienden a usar razonamientos formales buscando analogías entre los números positivos y los negativos o, como mucho, recurren a las temperaturas o a una recta vertical que representa el termómetro.

Últimamente, en Cid (2002) se discute también la pertinencia de una introducción de los números enteros por medio de modelos concretos por dos razones. La primera es que en la enseñanza de la aritmética elemental el proceso de modelización matemática se invierte: mientras en el ámbito científico lo habitual es que el objeto de estudio sea un cierto sistema o fenómeno del mundo sensible modelizado por medio de un sistema matemático, en el ámbito de la enseñanza el objeto de estudio es una noción aritmética que se modeliza por medio de un sistema físico o social con el que los alumnos se supone que están familiarizados. Además, el modelo funciona por analogía, es decir, permite obtener conocimiento sobre la noción matemática porque "se parece a ella" o "funciona como ella". Pero, en realidad, la estructura algebraica que más se asemeja a un modelo de neutralización es la estructura de espacio vectorial unidimensional (o, más precisamente, la restricción a $\mathbf{Z}$ del espacio vectorial $\mathbf{R}^1$), y la más cercana a un modelo de desplazamiento es el espacio afín unidimensional (o mejor, la restricción a $\mathbf{Z}$ de la recta real). En cambio, la estructura de anillo totalmente ordenado conmutativo y con unidad, propia de los números enteros, difícilmente podremos mostrarla por medio un modelo concreto, de ahí las dificultades didácticas que plantea su utilización.

La segunda razón es que la aritmética elemental no necesita de los números negativos porque todos los problemas que se plantean en ese ámbito pueden resolverse perfectamente en términos de números positivos, sin que el uso de los números negativos aporte técnicas de resolución más económicas ni más potentes. En este mismo sentido, Carraher (1990) pasó, a personas de distintas edades, un cuestionario sobre problemas de deudas y haberes en diferentes contextos. No se observó que el hecho de conocer los números enteros mejorara las tasas de éxito; incluso se comprobó que los encuestados que conocían los números negativos no los utilizaban, resolviendo los problemas por medio de números positivos a los que calificaban, de palabra o por escrito, como deudas o haberes. También Mukhopadhyay y otros (1990) comprueban que los alumnos se desenvuelven mejor en un contexto de deudas y haberes que en situaciones de cálculo formal con números enteros, lo que, a nuestro juicio, se debe al hecho de que en el primer caso resuelven utilizando números naturales.

## 7. Competencia de los alumnos en el ámbito de los números negativos

Una aportación mucho menos numerosa que la referente a las propuestas didácticas la componen los estudios estadísticos o clínicos que ponen de manifiesto la competencia de los alumnos al realizar tareas en las que intervienen números negativos. En ellos se constatan errores y dificultades de todo orden, correspondientes tanto a la estructura aditiva como a la multiplicativa u ordinal. Ahora bien, no es nada fácil relacionar las conclusiones obtenidas por unos y otros autores en el análisis de los cuestionarios, dadas las grandes diferencias de criterio con que han sido construidos los items y analizadas las respuestas. Tampoco es fácil reproducir los experimentos para contrastar los resultados, pues es bastante frecuente que en los artículos se expongan las conclusiones sin explicitar con detalle el cuestionario que las ha hecho posibles, ni las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos.

En lo que se refiere a la competencia en la realización de operaciones formales, Küchemann (1980, 1981) propone a alumnos de 14 años un cuestionario sobre suma, resta y multiplicación de números enteros. Los mayores porcentajes de éxito se obtienen en las sumas, seguidas por las multiplicaciones, mientras que las restas resultan ser las operaciones peor resueltas. Dentro de estas últimas, se observan diferencias entre restas con minuendo positivo, como ${}^{+}8-{}^{-}6$ o ${}^{+}6-{}^{+}8$, con porcentajes de éxito del 77% y 70%, respectivamente, y restas con minuendo negativo, como ${}^{-}2-{}^{-}5$ o ${}^{-}6-{}^{+}3$, con porcentajes de éxito del 44% y 36%, respectivamente[4]. Esto contradice, por lo menos aparentemente, los niveles de adquisición de la estructura aditiva de **Z** propuestos por Peled (1991) –de los que hablaremos más adelante–, donde se supone que la competencia en la realización de operaciones con el mismo signo se adquiere antes que la de efectuar operaciones con números de distinto signo. También Borba (1995) cree encontrar indicios de que se

[4] En el mundo anglosajón los números enteros se suelen introducir mediante una notación que diferencia los signos predicativos de los operativos binarios: los primeros se escriben en forma de exponentes situados a la izquierda del número.

resuelven mejor las operaciones que afectan a números del mismo signo que las que afectan a números de distinto signo.

Bell (1982) en entrevistas realizadas a alumnos de 15 años, comprueba que así como el 80% suman correctamente dos números enteros, solamente el 40% es capaz de restar sin errores. Murray (1985) examina también a alumnos de secundaria que han recibido enseñanza sobre los números enteros y obtiene que los mayores porcentajes de éxito se dan en el producto de dos números enteros (alrededor de 85% de aciertos) seguido por las sumas de enteros (alrededor del 75% de aciertos), mientras que las restas de enteros tienen porcentajes de éxito que varían entre el 46% ($8-{}^{-}3$) y el 69% ($3-8$). Tanto los resultados de Bell como los de Murray confirman, aunque sólo parcialmente, lo dicho por Küchemann.

Además, Bell analiza las estrategias utilizadas por los alumnos para efectuar las operaciones de enteros, comprobando que, sobre todo, usan razonamientos basados en la recta numérica o la idea de "cantidades menos que cero". En el caso de la suma, un procedimiento bastante usado consiste en determinar, en la recta numérica, el punto que corresponde al primer sumando y a partir de ahí contar tantas unidades como indica el segundo sumando, hacia la derecha o la izquierda según que éste sea positivo o negativo. Parece ser que los alumnos utilizan un procedimiento similar en el caso de la resta: ante operaciones como, por ejemplo, $7-{}^{-}2$, dicen que $7-{}^{-}2=5$ porque "restar es ir hacia la izquierda". Bell considera que este tipo de errores se deben a que los alumnos no están acostumbrados a interpretar la resta entre números positivos como diferencia (resultado de una comparación) sino, más bien, como la acción de quitar el sustraendo al minuendo. Esta misma hipótesis la hace también Gallardo (1996) cuando habla del 'no reconocimiento de la triple naturaleza de la sustracción'.

Bell constata también errores por utilización indebida de la regla multiplicativa de los signos: ${}^{-}9-{}^{-}2={}^{+}11$ porque "dos menos hacen un más". Este mismo fenómeno, el de aplicarle a una operación las reglas formales correspondientes a otra, lo señala Murray (1985) cuando dice que el error más frecuente en las restas es el de utilizar la regla de suma de enteros (por ejemplo, ${}^{-}9-{}^{-}4={}^{-}13$, ${}^{-}7-3={}^{-}4$ y $7-{}^{-}5=2$). En esta misma línea, Léonard y Sackur (1990) hacen notar que el porcentaje de éxitos de los alumnos en la realización de sumas y restas de enteros disminuye al enseñar el producto de enteros porque es entonces cuando aplican la regla multiplicativa de los signos a las sumas o restas de enteros, dando lugar a errores que al principio no se producían. También Iriarte y otros (1991) y Gallardo (1996) hacen referencia a estos hechos.

Hativa y Cohen (1995) hacen una lista de los errores más frecuentes en la realización de sumas y restas de enteros que amplía lo ya señalado por otros autores:

a) Operación: 0-x, x>0. Respuestas erróneas: x, 0, 10-x. Por ejemplo: 0-4=4 ó 0 ó 6.

b) Operación: x-y, y>x>0. Respuestas erróneas: y-x, x+y, -(x+y), x, y. Por ejemplo: 3-8=5 u 11 ó -11 ó 3 u 8.

c) Operación: -x-y, x>0, y>0. Respuestas erróneas: x-y, y-x, x+y, x. Por ejemplo: -3-8=-5 ó 5 u 11 ó 3.

d) Operación: -x+x, x>0. Respuestas erróneas: 2x, x. Por ejemplo: -3+3=6 ó 3.

e) Operación: -x+y, x>y>0. Respuestas erróneas: x-y, x+y, -(x+y), x, y. Por ejemplo: -8+3=5 u 11 ó -11 u 8 ó 3.

Un aspecto poco estudiado es el del comportamiento de los alumnos en la realización de operaciones de enteros con más de dos términos y en el uso de paréntesis. En el trabajo de Herscovics y Linchevski (1994), aun cuando su objetivo es el de analizar la habilidad de los alumnos para manejar las incógnitas, averiguan que en secuencias como la siguiente: 237+89-89+67-92+92, bastantes alumnos optan por prescindir del signo '-' que acompaña a 89 y efectúan la suma 89+67 y todavía son más los que prescinden del signo '-' que acompaña a 92 y suman 92+92.

En otro orden de cosas, Duroux (1982), analizando un cuestionario, habla del alto porcentaje de alumnos (más del 60%) que no asumen que -x puede significar el opuesto de x. También Johnson (1986) plantea el problema de la representación literal de los números enteros y señala las dificultades de los alumnos para entender que -x puede representar un número positivo.

## 8. Concepciones de los alumnos sobre los números negativos

Además de los artículos que recogen los errores y dificultades, existen otros que tratan de relacionar los distintos comportamientos de los alumnos, tanto correctos como incorrectos, agrupándolos en 'estados de conocimiento', 'perfiles', 'concepciones', etc., en un intento de dar una visión coherente de los mismos y encontrar las causas últimas que los producen. En este sentido, nos encontramos los trabajos de Peled (1991) y de Gallardo (1996, 2002). El primero define, en función de las estrategias que utilizan los alumnos en las sumas y restas de dos números enteros, unos 'niveles de conocimiento' de la estructura aditiva de **Z**. Se trata de niveles teóricos, es decir, no son el resultado del estudio estadístico de un cuestionario, sino un "a priori" que el autor propone como instrumento facilitador del análisis de observaciones posteriores. A la hora de establecer esos niveles de conocimiento tiene en cuenta dos 'dimensiones': la interpretación del número entero como punto de la recta o desplazamiento ('dimensión de la recta real') y la interpretación como cantidad de magnitud con dos sentidos opuestos ('dimensión de la cantidad'), pues asegura que los alumnos usan una u otra, según el tipo de problema que se les plantea. Los niveles de conocimiento que define son los siguientes:

Nivel 1

*Dimensión de la recta numérica:* Se acepta la existencia de los números negativos y se sitúan en la recta numérica a la izquierda del cero. Un número entero negativo es un número natural precedido del signo menos. Dados dos números enteros es mayor el que está situado a la derecha del otro en la recta numérica.

*Dimensión de la cantidad:* Los números negativos representan cantidades que tienen alguna característica desfavorable, cuya existencia se marca con el signo menos. Debido a esta connotación negativa la relación de orden en estos números se invierte respecto a los naturales: una cantidad negativa es menor cuanto mayor es su valor absoluto porque representa una situación "peor".

*Nivel 2*

*Dimensión de la recta numérica:* Se interpreta la suma y resta de números naturales como movimientos sobre la recta numérica, a derecha o izquierda del primer término, respectivamente. Esta estrategia se extiende a los casos: -a+b, con a,b pertenecientes a **N**, y a-b, con a,b pertenecientes a **N** y a<b, asumiendo, en el primer caso, que el movimiento se inicia a la izquierda de cero y, en el segundo, que hay que atravesar el cero[5].

*Dimensión de la cantidad:* Se extiende la operación de resta entre números naturales al caso de sustraendo mayor que el minuendo, efectuando la resta del menor respecto al mayor y añadiendo al resultado el signo menos para indicar que el resultado es una "deuda" o "deficiencia".

*Nivel 3*

*Dimensión de la recta numérica:* Las operaciones se extienden a pares de números que tienen el mismo signo. Se asume que hay un sentido positivo: hacia la derecha, y un sentido negativo: hacia la izquierda, y que sumar números positivos significa avanzar en el sentido positivo y sumar negativos avanzar en el sentido negativo. Argumentos similares

---

[5] La estrategia de sumar o restar "cruzando el cero" consiste en realizar la operación en dos etapas, obteniendo un cero como resultado intermedio. Esta estrategia la ponen también de manifiesto Mukhopadhyay y otros (1990) y Hativa y Cohen (1995), detallando estas últimas que para algunos alumnos el cero funciona como un "stop" entre semirrectas: todo paso de una a otra exige hacer una parada en él.

se usan para realizar la resta de números del mismo signo: restar positivos significa ir hacia los negativos y restar negativos ir hacia los positivos.

*Dimensión de la cantidad:* Se asumen las sumas y restas de números del mismo signo entendiendo que sumar significa añadir y restar significa quitar. No se manejan correctamente las restas de números negativos con minuendo mayor que el sustraendo, ni las sumas y restas de números de distinto signo.

*Nivel 4*

*Dimensión de la recta numérica:* Se efectúan sumas y restas de números enteros cualesquiera sin más que fijarse en el segundo término de la operación, avanzando en el sentido que indica su signo si se trata de una suma y en el sentido contrario si es una resta.

*Dimensión de la cantidad:* Se realizan sumas y restas con cantidades de signos cualesquiera. El examen conjunto de la operación implicada y del signo de la segunda cantidad permite decidir si la cantidad inicial "mejora" o "empeora".

Tampoco se limita Gallardo a mostrar los diferentes errores cometidos por los alumnos, sino que trata de encontrar una relación entre ellos. Analizando las estrategias de resolución algebraica de problemas que utilizan los alumnos de secundaria (Gallardo, 1996), define cuatro 'perfiles' que representan distintos niveles de conceptualización del número negativo, sobre todo en lo referente al cálculo formal. De esos perfiles describe los dos más extremos, designados por A y D:

> *Perfil A*
>
> 1) *Presencia del dominio multiplicativo en las situaciones aditivas.* Esto significa el uso incorrecto de la regla multiplicativa de los signos en las adiciones y sustracciones de enteros.
>
> 2) *Ignorancia de la triple naturaleza de la sustracción y de la triple naturaleza del signo menos*. Los alumnos con un avanzado nivel de conceptualización de los números negativos reconocen la triple naturaleza de la sustracción (completar, quitar y diferencia entre dos números) y la triple naturaleza del signo menos (binaria, unaria y el simétrico de un número). Los estudiantes pertenecientes al *Perfil A* ignoran la triple naturaleza de la sustracción y la triple naturaleza del signo menos.
>
> 3) *Operatividad incorrecta en las esferas aritmética y algebraica.* Los estudiantes desarrollan mecanismos inhibitorios cuando se les presentan dobles signos [-(+a), -(-a)]. Las expresiones abiertas de la forma x+a-b= , a-x-b= , reciben cinco interpretaciones erróneas diferentes: i) son iguales a un valor numérico arbitrario: x+a-b=c; a-x-b=d (clausura). ii) Son tratadas como ecuaciones x=a-b; x=-b-a. iii) Conjunción de términos desemejantes: x+a-b=(a-b)x; a-x-b=(a-b)x; a-x-b=ax+b.

> 4) *Inconsistencia en el uso del lenguaje algebraico*. Cuando se resuelven ecuaciones y existe la posibilidad de una solución negativa, se encuentra lo siguiente: i) los métodos escolares para resolver ecuaciones no se usan. ii) La estructura de la ecuación se altera para obtener soluciones positivas. Por ejemplo, la ecuación x+a=b con a>b se convierte en a-x=b.
>
> 5) *Preferencia por los métodos aritméticos de resolución de problemas*.
>
> 6) *Ignorancia de las soluciones negativas de los problemas*. Los estudiantes resuelven los problemas de enunciado verbal sin expresar la solución en términos negativos. Usan un lenguaje verbal para dar una respuesta positiva. (Gallardo, 1996, pp. 381-382)

En cuanto al perfil D, supone la superación de los errores de cálculo, la comprensión de la triple naturaleza de la sustracción y del signo 'menos', el predominio de los métodos algebraicos sobre los aritméticos y la aceptación de las soluciones negativas de las ecuaciones.

Además, en Gallardo (2002) se establecen cuatro niveles de aceptación del número negativo: como sustraendo, como número relativo, como número aislado y como número negativo formal. Estos niveles se deducen de un estudio epistemológico del número negativo y se confirman en los alumnos actuales mediante una técnica de entrevistas en las que se analizan sus respuestas a problemas aritméticos verbales.

## 9. La noción de obstáculo epistemológico

El tercer grupo de trabajos, referente a las implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo, se organiza en torno a la noción de 'obstáculo epistemológico', inicialmente definida por Bachelard (1938) en el ámbito de la filosofía de la ciencia y posteriormente adaptada por Brousseau al ámbito de la didáctica de las matemáticas, en general, y a la teoría de las situaciones didácticas, en particular.

En la teoría de situaciones didácticas se postula que un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación. El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones-problema en las que es útil como estrategia de resolución (Brousseau, 1989, p. 41). La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida resolviendo situaciones-problema en las que dicha noción está implicada.

Ahora bien, en la enseñanza es imposible presentar para cada noción matemática el conjunto de todas las situaciones-problema en las que ésta interviene, lo que obliga a elegir unas pocas de entre ellas, un subconjunto de situaciones. Y esa elección puede dar lugar a que el alumno adquiera una concepción, es decir, un conjunto organizado de conocimientos que funcionan con éxito en ese subconjunto de situaciones y para determinados valores de sus variables didácticas, que se manifiesta por un repertorio estable y limitado de comportamientos, lenguajes, técnicas, etc., pero que no es eficaz e, incluso, provoca errores al utilizarse en otro subconjunto de situaciones o al modificar las variables didácticas de la situaciones consideradas (Antibi y Brousseau, 2000, p. 20).

Una concepción tiene, por tanto, un campo de problemas en el que funciona y otro campo de problemas en el que no permite resolver o, al menos, dificulta la resolución. De manera que la ampliación del campo de problemas va a obligar a la concepción a evolucionar, modificando alguno de sus aspectos, para adaptarse a las nuevas situaciones. Pero, dentro de esta perspectiva, podríamos encontrarnos con una concepción a la que ya no fuera posible hacer evolucionar para que asumiera nuevos campos de problemas, en cuyo caso no quedaría más alternativa que el rechazo de la concepción y su sustitución por otra. En estos casos, en los que la ampliación del campo de problemas exige la sustitución de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y, además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible, diremos que la concepción es un obstáculo. Y esta ‘concepción obstáculo’ (en adelante, simplemente, ‘obstáculo’) se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproductibles y persistentes (Brousseau, 1983, p. 173).

Cuando además ese mismo obstáculo se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo, hablamos de ‘obstáculo epistemológico’. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual.

Duroux (1982, pp. 20-21) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo epistemológico a una concepción. Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau (1989, p. 43), es la siguiente:

a) Un obstáculo es un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.

b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.

c) Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto; una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.

d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca, sino que es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada, provocando errores.

Las nociones de concepción y obstáculo no son sólo un instrumento teórico de la didáctica de las matemáticas, también tienen una repercusión inmediata en la práctica docente. La consideración de que errores distintos y aparentemente independientes unos de otros pueden deberse a una concepción, abre la puerta a la posibilidad de erradicarlos con más éxito por medio de acciones didácticas que actúen directamente sobre la concepción y eviten la tediosa tarea de corregir los errores uno por uno. También la determinación de si una concepción constituye o no un obstáculo tiene implicaciones importantes en la práctica docente. Si la concepción no es un obstáculo el trabajo del profesor deberá centrarse en la presentación de situaciones de enseñanza que favorezcan su evolución, mientras que, si lo es, será necesario atacar esa concepción hasta conseguir que el alumno la rechace y esto último exige acciones didácticas mucho más radicales. En ese caso, ya no sirve el procedimiento, habitual en la práctica docente, de construir las nuevas situaciones de enseñanza modificando levemente las variables didácticas de las situaciones en las que el conocimiento antiguo tenía éxito, sino que serán precisas modificaciones bruscas de las variables didácticas que impliquen una modificación cualitativa de los conocimientos necesarios para adaptarse a la nueva situación.

Por último, hay que decir que la noción de obstáculo epistemológico ha generado polémica entre los investigadores en didáctica de las matemáticas y que varios de ellos (Glaeser, 1981; Sierpinska, 1989; Schubring, 1986; Artigue, 1990; Léonard y Sackur, 1990; Gascón, 1993; Chevallard y otros, 1997) no la aceptan o le dan un sentido bastante distinto al propuesto por Brousseau. Además, apenas hay aportaciones al problema metodológico de cómo decidir si una concepción es o no un obstáculo.

## 10. Obstáculos epistemológicos en los números negativos: la aportación de Glaeser

La primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números negativos aparece en un artículo de Glaeser (1981). En él, el autor manifiesta su intención de buscar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos. Para ello, busca los vestigios de esos obstáculos en el pasado analizando, mediante una técnica de comentario de textos, lo que los matemáticos de distintas épocas (Diofanto, Stevin, Descartes, MacLaurin, Clairaut, Euler, Cramer, d'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy y Hankel) dijeron sobre los números negativos.

Lo primero que llama su atención es la "sorprendente lentitud" del proceso histórico de construcción del concepto de número negativo. La lectura de los textos citados por Glaeser muestra que desde la primera formulación de la regla de los signos, hecha por Diofanto, hasta mediados del siglo XIX, se utilizan de continuo unos entes, los ahora llamados números negativos, que eran necesarios en muchas ramas de las matemáticas (álgebra, análisis, geometría analítica, trigonometría, etc.), pero que la comunidad matemática no sabía como encajar dentro de su cuerpo teórico. Los números negativos se usaban con profusión y sin dificultad, pero cuando los grandes matemáticos se veían en la tesitura de tener que dar explicaciones sobre su naturaleza, lo hacían en unos términos difícilmente concebibles hoy en día. Un ejemplo de esto es Carnot quien en 1803, en los preliminares de su célebre *Géométrie de position*, dedica veinticuatro páginas a las cantidades negativas y dice cosas como las siguientes:

> Nada es más simple que la noción de cantidades negativas precedidas por cantidades positivas más grandes que ellas; pero en álgebra nos encontramos a cada paso con expresiones de formas negativas aisladas y cuando se quiere conocer con precisión el sentido de estas expresiones faltan principios claros, porque éstas son el resultado de operaciones que no son, en sí mismas, claras ni ejecutables más que para las cantidades positivas o, más bien, absolutas. (Carnot, 1803, pp. 2-3)
>
> Para obtener realmente una cantidad negativa aislada será necesario sustraer una cantidad efectiva de cero, quitar algo de nada: operación imposible. ¿Cómo concebir entonces una cantidad negativa aislada? (Carnot, 1803, p. 3)
>
> Las nociones que se han dado hasta el momento sobre las cantidades negativas aisladas se reducen a dos: aquélla de la que acabamos de hablar, a saber, que son cantidades menores que cero, y la que consiste en decir que las cantidades negativas son de la misma naturaleza que las positivas, pero tomadas en un sentido contrario. (Carnot, 1803, p. 6)
>
> Yo digo, en primer lugar, que la primera de esas nociones es absurda y para destruirla basta con advertir que teniendo el derecho de omitir en un cálculo las cantidades nulas, por comparación con aquéllas que no lo son, con más razón deberíamos tener el derecho de omitir aquéllas que son menores que cero, es decir, las cantidades negativas, lo que es ciertamente falso: por tanto, las cantidades negativas no son menores que cero. (Carnot, 1803, p. 9)

> Una multitud de paradojas o, más bien, de absurdos palpables resultará de la misma noción; por ejemplo, -3 será menor que 2; sin embargo, $(-3)^2$ será más grande que $2^2$, es decir, que entre dos cantidades desiguales el cuadrado de la más grande será menor que el cuadrado de la más pequeña, lo que choca con todas las ideas claras que podamos hacernos sobre la cantidad. (Carnot, 1803, p. 9)

No es extraño el asombro de Glaeser ante manifestaciones como las anteriores y su intento de explicar estos fenómenos en términos de obstáculos. Según él, en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstáculos:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.* Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias[6] y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.

- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.* En la obra de algunos matemáticos (Stevin, d'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las "ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

- *Dificultad para unificar la recta real.* En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (MacLaurin, d'Alembert, Carnot y Cauchy) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: "lo negativo" neutralizaba, se oponía a "lo positivo", pero era de naturaleza distinta. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.

- *La ambigüedad de los dos ceros.* Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, MacLaurin, d'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos

---

[6] Las primeras referencias a lo que después serían los números negativos surgen en el entorno de la resolución algebraica de ecuaciones.

más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que nada"[7].

- *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.* La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. Según Glaeser, el problema de justificar la regla de los signos lo resolvió definitivamente Hankel, en sus *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* de 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación de $\mathbf{R}^+$ a $\mathbf{R}$ respetando un principio de permanencia que conservara determinadas "buenas propiedades" de la estructura algebraica de los reales positivos[8]. Esto, a juicio de Glaeser, supone un cambio total de perspectiva en la resolución del problema: ya no se trata de descubrir en la Naturaleza ejemplos prácticos que "expliquen" los números negativos de un modo metafórico, sino de una justificación puramente formal basada en necesidades internas de las matemáticas.

La creencia en que una noción matemática debe tener un referente en el mundo físico que le dé sentido y a partir del cual se puedan justificar sus propiedades, se relaciona, según Glaeser, con una corriente ideológica muy amplia que se inicia en los *Elementos* de Euclides e impregna todo el pensamiento matemático hasta fines del siglo XIX. Se caracteriza por suponer que los objetos matemáticos son objetos del mundo físico que han sido suficientemente idealizados para poder insertarlos en un discurso hipotético-deductivo, lo cual permite que allí donde ese razonamiento deductivo no alcanza, pueda recurrirse al "pensamiento natural", el "sentido común" o la "intuición" como medio de justificación del discurso matemático. Pero esta forma de entender las matemáticas, que posee indudables ventajas, también tiene serios inconvenientes, como el que se plantea cuando a través del razonamiento deductivo se demuestran propiedades que repugnan a la "razón natural". Glaeser atribuye a matemáticos como Stevin, Euler, d'Alembert, Carnot y Laplace este tipo de ideología, mientras que la postura de Hankel representa la superación del obstáculo y "se inscribe en un vasto *rechazo de la ideología de la luz natural*" (Glaeser, 1981, p. 340).

[7] Hay que tener en cuenta, como muy bien señala Glaeser (1981, p. 239), que el establecimiento de las escalas de temperatura Celsius o Réaumur, uno de los hechos que pudo contribuir a la aceptación de un cero origen y de cantidades por debajo de cero, fue bastante tardío. Réaumur realizó sus primeros termómetros en 1730 y Celsius en 1742, pero tardaron casi un siglo en popularizarse. Antes de eso, en 1713, Fahrenheit había propuesto otra escala de temperatura que refleja claramente el deseo de evitar los números negativos.

[8] En realidad, el primero en enunciar el posteriormente llamado 'principio de permanencia de las leyes formales' parece ser que fue Peacock en su *Treatise on Algebra* de 1830.

- *Deseo de un modelo unificador*. Es el deseo, largamente sentido por la comunidad matemática, de encontrar un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vías de aprenderlos. Su existencia hubiera evitado la necesidad de superar el obstáculo anterior, pero hasta hoy no ha sido encontrado y los que se utilizan habitualmente en la enseñanza, como, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explican satisfactoriamente la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa. También aquí la obra de Hankel ha supuesto la superación del obstáculo al rechazar la búsqueda de un modelo explicativo de los enteros.

Glaeser concluye diciendo que sería necesario realizar experiencias con los alumnos para comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el estudio histórico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales. Añade también que su investigación pone de manifiesto que los modelos concretos, habitualmente utilizados en la enseñanza de los números enteros, son un obstáculo para la comprensión de su estructura multiplicativa.

## 11. Otras aportaciones a la epistemología de los números negativos

Son varios los autores que, a raíz del trabajo de Glaeser, discuten el tema de los obstáculos epistemológicos en los números negativos. Entre ellos, Duroux (1982) hace hincapié en que la definición de obstáculo epistemológico propuesta por Brousseau exige que el obstáculo sea un conocimiento, no una falta de conocimiento. Teniendo esto en cuenta, considera que los dos primeros obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser: la “falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas” y la “dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas”, no debieran ser considerados como tales pues sólo indican un déficit de conocimiento.

Sin embargo, la “dificultad para unificar la recta real”, puede ser, según Duroux, un síntoma de una posible concepción obstáculo caracterizada por considerar a los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos. Añade, además, que la concepción del número como expresión de la medida de una cantidad de magnitud puede estar en la base de la diferente consideración de positivos y negativos, dado que entonces el número negativo sólo puede interpretarse como una medida “a la inversa”, como un objeto compuesto de dos partes: el signo - y una medida, mientras que el positivo representa, sin más, una medida. Esto puede llevarnos a interpretar los números enteros negativos como algo radicalmente distinto de los números naturales y no como su prolongación.

Brousseau (1983) argumenta en la misma línea que Duroux, insistiendo en que hay que distinguir entre un "obstáculo" y una "dificultad", sugiriendo que lo que propone Glaeser son "dificultades" que pueden servir como punto de partida para la búsqueda de los verdaderos "obstáculos", que deben expresarse en términos de conocimientos válidos en un cierto dominio. En el intento de encontrar el obstáculo u obstáculos que puedan estar detrás de las dificultades reseñadas por Glaeser, Brousseau (1983, p. 191) hace la hipótesis de que el empleo de números con signo se generalizó al atribuir arbitrariamente el estatuto de "positivo" o "negativo" a las medidas de las cantidades de magnitud, según el papel que representaban en la situación. Por ejemplo, dependiendo de la situación, la entrada y salida de productos en un comercio puede notarse positiva o negativamente. Esos números, considerados aisladamente son números sin signo, puesto que representan medidas de magnitudes; el signo es algo circunstancial, provisional, que sirve para indicar la oposición de unas cantidades respecto a otras en el transcurso de la acción. Así pues, el carácter "relativo" de los números positivos y negativos pudo jugar un papel importante en su creación y aceptación y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número.

También retoma la propuesta de Duroux, respecto a que la concepción de los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos pudo ser un obstáculo a la homogeneización de los dos tipos de números y su inclusión en una única clase: la de los enteros, pero advierte de que, tanto la "relatividad de positivos y negativos" como "la diferente naturaleza de los negativos respecto a los naturales", son sólo candidatos a obstáculo y que su aceptación como tales exige probar la resistencia de esas concepciones a evolucionar y los errores repetidos que produjeron. Brousseau piensa que en el intento de probar el carácter de obstáculo de estas concepciones es muy probable que se haga evidente la existencia de un obstáculo todavía más antiguo: "la concepción del número como medida", es decir, la idea de que un objeto matemático sólo puede recibir la consideración de número si representa o puede representar la medida de una cantidad de magnitud.

A la hora de explicar la difícil emergencia del número negativo, Schubring (1986) recurre también al término 'obstáculo', pero con un sentido distinto al usado por los autores anteriores. Así dice (1986, pp. 22-24) que las principales causas de impugnación de los números negativos como objeto plenamente matemático pertenecen a tres grandes categorías:

- *Obstáculos internos a las matemáticas.* Dentro de esta categoría señala la dificultad para distinguir entre cantidad, magnitud y número. Históricamente, el concepto básico de las matemáticas ha sido el de "cantidad", pero, hoy en día, ese término ha dejado de representar una noción matemática precisa, siendo sustituido por el de "número". A juicio de Schubring, uno de los hechos que obstaculizó el proceso de conceptualización del número negativo fue la tardía diferenciación entre número, cantidad y magnitud que revela la lectura de los textos matemáticos de otras épocas.

- *Obstáculos epistemológicos.* Considera como tales, los que se refieren a:

> Las epistemologías subyacentes a la transmisión del saber científico a la sociedad en general. Por "epistemología" se puede entender las concepciones sobre las condiciones de "existencia" de las entidades matemáticas. Estas epistemologías se presentan con la siguiente alternativa:
>
> - una epistemología sustancialista (u ontológica), según la cual los conceptos se justifican por reducción a unos entes a los que se concede una existencia semejante a la del mundo físico;
>
> - una epistemología sistémica, donde la existencia está justificada por la coherencia del campo conceptual y los conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas. (Schubring, 1986, p. 23)

En opinión del autor, la opción por una u otra de estas alternativas puede ser responsable de alguna de las rupturas descritas en el ámbito de los números negativos. Se observa aquí una cierta coincidencia entre Schubring y Glaeser respecto a un posible obstáculo, aun cuando le dan nombres distintos: el primero le adjudica el término genérico de 'obstáculo epistemológico', mientras que el segundo le llama 'estancamiento en el periodo de las operaciones concretas'.

- *Arquitectura de las matemáticas.* Se refiere con esto a una tercera categoría de obstáculos que tienen que ver con la importancia que en cada época se ha concedido a las distintas ramas de las matemáticas, en particular, al álgebra y a la geometría. El hecho de que las dos tengan igual importancia favorece a nociones, como la de cantidad, integradoras de los dos ámbitos, lo que perjudica el proceso de diferenciación entre número y cantidad; si se considera a la geometría como la rama más importante de las matemáticas, la cantidad se convierte en la noción básica de las matemáticas y la de número es una noción subsidiaria; por último, si es el álgebra la disciplina fundamental y la geometría un campo de aplicación del álgebra, se tiene entonces la concepción que sostuvo el proceso llamado de 'aritmetización de las matemáticas' con el número como noción básica. Schubring considera que muchas rupturas conceptuales pueden explicarse en términos de concepciones sobre la "arquitectura de las matemáticas".

Como puede verse, la idea de obstáculo que maneja Schubring está muy alejada de la propuesta de Brousseau; parece que entiende por obstáculos ciertos conocimientos esencialmente meta-matemáticos que son, según él, las causas últimas de las rupturas observadas en el proceso de evolución del estatuto matemático de algunas nociones; rupturas que, por otra parte, queda sin definir en qué consisten y cómo se reconocen. Únicamente en la primera categoría de obstáculos que propone, los 'obstáculos internos', hace referencia a conocimientos propiamente matemáticos, pero enseguida añade que esta categoría no parece haber sido la causa principal de las rupturas.

Posteriormente, aunque se produce una polémica a nivel general sobre el sentido y utilidad del concepto de obstáculo epistemológico en la didáctica de las matemáticas, no vuelve a discutirse el caso particular de los números negativos. Los trabajos sobre epistemología del número negativo (Pycior, 1981; Milazzo y Vacirca, 1983; Sesiano, 1985; Fischbein, 1987; Lay-Yong y Tian-Se, 1987; Vargas-Machuca y otros, 1990; Hefendehl-Hebeker, 1991; Haegel, 1992; Thomaidis, 1993; Dell'Aquilla y Ferrari, 1995; Gobin y otros, 1996; Hitchcock, 1997; Cid, 2000; Gallardo, 2002), o bien no se expresan en términos de obstáculos epistemológicos, o bien hacen una utilización ambigua del término en la que caben sinónimos como 'dificultad', 'ruptura', etc., o bien repiten con pequeñas matizaciones lo ya dicho por Glaeser, Brousseau, Duroux o Schubring.

Comentario aparte merece el trabajo de Lizcano (1993) que no se expresa en términos de obstáculos, pero llega a establecer, después de un estudio muy pormenorizado, cuáles son las características de la cultura griega clásica que impidieron la aceptación de ciertas formas de negatividad[9] que, sin embargo, en la cultura china de la misma época se desarrollaron sin problemas:

> Así, las principales diferencias entre las matrices fundamentales de los imaginarios griego y chino son: i) pensar por abstracción (*aphaíresis*) y determinación, en términos de géneros y especies, *versus* pensar por analogía, simetría o equivalencias; ii) asumir principios como el de identidad o no-contradicción como principios primeros (tanto del ser como del pensar) *vs.* una matriz preconceptual que pre-dispone (la realidad y el pensamiento) según criterios de alternancia de contrarios y oposiciones en torno a un hueco (*wu*) o centro; iii) suponer un espacio (y, en particular, un espacio de representación) que es extensión de-limitada *vs.* un espacio simbólico marcado por la

[9] Lizcano, cuando se refiere a las matemáticas chinas o griegas de la Antigüedad, no habla de 'números negativos' sino de 'negatividad' o 'formas de negatividad'. Para él, llamar 'números negativos' a ciertos objetos considerados generalmente como antecedentes históricos de los mismos, presupone la reducción de los significados de cada época a los significados actuales, lo que sesga irremediablemente el análisis epistemológico.

> oposición, en el que los lugares significan; esto es, un espacio extenso *vs.* un espacio tenso; iv) la *negatividad* se ve así obligada a pensarse, en una tradición en términos de sustracción (*aphaíresis*) y del posible sentido de expresiones como 'nada', 'menos que nada', 'lado de un cuadrado de superficie menor que nada', 'sustraer una magnitud mayor de una menor', etc., mientras que, desde la otra tradición, se piensa en términos de opuestos articulados en torno a un quicio que, rigiendo su enfrentamiento, rige también su anulación recíproca (*jin*). (Lizcano, 1993, pp. 266-267)

## 12. Influencia de los obstáculos epistemológicos en los estudios sobre dificultades de aprendizaje o propuestas didácticas

La bibliografía correspondiente a obstáculos epistemológicos en los números negativos ha tenido poco impacto en la que se refiere a las propuestas de enseñanza y los errores y dificultades de los alumnos. Como mucho, aparecen citas al respecto en algunos trabajos, pero sin que esta mención repercuta en el planteamiento de las nuevas propuestas de enseñanza o en el análisis de las ya existentes o de los errores de los alumnos. De hecho, no existen investigaciones que, expresamente, se propongan confirmar la existencia de los obstáculos históricos en los alumnos actuales; lo que sí existe es algún trabajo en el que el autor conoce los estudios epistemológicos sobre los números negativos y, aun cuando sus objetivos son otros, relaciona, o da lugar a que se pueda relacionar, algunos de sus resultados con los obtenidos en dichos estudios.

Coquin-Viennot (1985), analizando las estrategias de resolución empleadas y los errores cometidos por alumnos de 11 a 15 años en un cuestionario sobre números enteros, delimita una 'jerarquía de concepciones' en la que cada concepción supone un paso adelante respecto a la anterior, pero entendiendo también que cada una de ellas es un obstáculo de cara a la concepción siguiente. En su investigación tiene muy en cuenta los trabajos sobre epistemología de los números negativos: los obstáculos que ella reconoce en los alumnos ya se han comentado anteriormente al hablar de la historia de los números negativos. La jerarquía de concepciones que establece es la siguiente:

a) Los números enteros se manejan como si se tratase de naturales: el signo '-' se interpreta como símbolo de la resta entre números naturales o bien se ignora, lo que produce muchas respuestas erróneas. El número está considerado como la medida de una cantidad y no puede ser más que positivo. Se reconoce que los enteros negativos son menores que los enteros positivos, pero la relación de orden entre los enteros negativos se establece en el mismo sentido que la de sus valores absolutos.

b) Se resuelven correctamente los problemas que ponen en juego la estructura aditiva de **Z**, pero se utiliza **N** siempre que sea posible y permita obtener la respuesta correcta; si no, se trabaja separando los positivos de los negativos, hasta el punto de que las simplificaciones en las sumas de varios sumandos no juegan ningún papel. No se produce la unificación del conjunto de los enteros, pero los unos se definen por oposición a los otros. Aparecen más respuestas correctas en las preguntas que afectan al orden entre enteros negativos, mientras que en los problemas en los que interviene la estructura multiplicativa de **Z** apenas se esbozan las soluciones.

c) Los problemas aditivos se resuelven en **Z**, aun cuando puedan resolverse en **N**, siempre que eso resulte más eficaz. Las estrategias de resolución en **Z** ponen de manifiesto su homogeneización: positivos y negativos son tratados como un todo, ya no se manejan por separado. La relación de orden entre enteros negativos se establece correctamente y empiezan a utilizarse las relaciones de compatibilidad existentes entre el orden y la suma de enteros. Podemos considerar que la recta numérica está ya unificada; sin embargo, los problemas que exigen poner en juego la estructura multiplicativa de **Z** no se resuelven correctamente[10].

d) Esta concepción engloba la concepción anterior con el añadido de que los problemas de tipo multiplicativo se resuelven correctamente, lo que indica que la estructura multiplicativa de **Z** ha sido asumida.

Vergnaud (1989) hace notar que son muchos los alumnos que se equivocan al restar un número negativo o dividir por él. También comenta que si en el transcurso de la resolución de una ecuación se llega a una expresión como, por ejemplo, $-x=7$, muchos alumnos no saben continuar o dicen que la solución es $x=7$. Considera que estos y otros errores pueden ser síntomas de la existencia de un obstáculo epistemológico: la reducción de la noción de número a la de medida de magnitudes, pero cree que sería necesario hacer investigaciones que confirmaran la hipótesis.

Iriarte y otros (1991) al analizar un cuestionario sobre números enteros propuesto a alumnos de Octavo de EGB y de Diplomaturas de Magisterio, hablan de ‘ideas

[10] Esto contradice, en principio, lo que dicen Küchemann (1980, 1981) y Murray (1985) (vease epígrafe 7) sobre el mayor éxito de los alumnos en los productos que en las restas. Si se analizan los hechos que permiten a unos y otros decir cosas aparentemente contradictorias, nos encontramos con que Coquin-Viennot considera que los alumnos han asimilado la estructura multiplicativa de **Z** cuando contestan correctamente a los dos items siguientes: “Si x e y son dos números enteros tales que $x \geq y$, escribe la relación de orden entre $-3x$ y $-3y$”, “Si $x \geq +2$, ¿cómo puedes escribir $|x-(+2)|$ sin utilizar las barras verticales?”, mientras que Küchemann pregunta por el resultado de operaciones como las siguientes: “$^{-}3 \mathrm{x} ^{+}4$” y “$^{+}4 \mathrm{x} ^{-}4$”. Esto indica hasta qué punto la variedad de cuestionarios

obstaculizadoras' que agrupan en dos apartados, el primero de los cuales refleja de nuevo el obstáculo del "número como medida", comentado con profusión en el ámbito de la historia. Achacan a este obstáculo los errores que se producen como consecuencia de creer que la suma y la multiplicación de números suponen siempre un aumento, que la resta supone una disminución y que el orden entre dos números negativos es el mismo que se establece entre sus valores absolutos.

También Gallardo (1996, 2002) (vease epígrafe 8) conoce los obstáculos epistemológicos definidos por Glaeser y basa sus estudios sobre el comportamiento de los alumnos en estudios epistemológicos previos, aun cuando no los expresa en términos de obstáculo.

Por otra parte, las conclusiones que se desprenden de los estudios sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos hacen sospechar que la utilización en la enseñanza de modelos concretos de neutralización o desplazamiento puede no ser pertinente o, por lo menos, debe discutirse su pertinencia. Para empezar, hay que afrontar la posibilidad de que dichos modelos sean un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa de los números enteros. Además, la hipótesis de que la concepción del "número como medida" es un obstáculo, plantea también dudas sobre si la utilización de modelos concretos está en consonancia con el tratamiento didáctico apropiado para hacer frente a un obstáculo. En realidad, una acción didáctica adecuada iría en la línea de plantear al alumno situaciones muy diferentes de las que suelen aparecer en el ámbito de la aritmética elemental, para que se viera obligado a poner en duda su concepción del número como medida.

A esto hay que añadir que cualquier incursión en la historia de los números negativos pone de manifiesto que han surgido por necesidades internas de las matemáticas ligadas, concretamente, al desarrollo del cálculo formal algebraico y de la teoría de ecuaciones. Como consecuencia, algunos autores han puesto en duda la legitimidad de las justificaciones didácticas basadas en modelos concretos por ser ajenas a la historia de la noción.

Se desprende de todo esto una idea genérica de que "lo concreto" puede, por diferentes razones, ser un obstáculo para una buena concepción del número entero. Ahora bien, si nos preguntamos qué influencia ha tenido todo este discurso en los diseñadores de propuestas didácticas deberemos contestar que muy poca. Actualmente se sigue defendiendo la utilización de modelos concretos y, mayoritariamente, se ignoran o se prescinde de las opiniones vertidas en los artículos sobre epistemología de los números

---

propuestos y de niveles educativos en los que se proponen hace prácticamente imposible contrastar los resultados obtenidos por unos y otros autores.

negativos. Entre los que se dan por enterados de las investigaciones sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos, la mayor parte de ellos se limitan a hacer una cita más o menos extensa al respecto y no analizan desde el punto de vista epistemológico los modelos que proponen. Sólo algunos, como Vargas-Machuca y otros (1990) y Gobin y otros (1996), advierten de que los modelos concretos pueden obstaculizar una buena comprensión de la noción matemática de número entero, aunque siguen proponiendo su utilización.

Un planteamiento completamente distinto es el de Thomaidis (1993) que, en vez de recurrir a modelos concretos de neutralización o desplazamiento, propone un modelo abstracto: el de los exponentes de las potencias de un misma base. Considera que, históricamente, la necesidad de utilizar exponentes positivos y negativos jugó un papel importante a la hora de dar un estatuto matemático a los números negativos. En consecuencia, propone usar ese modelo en la enseñanza para justificar las reglas de las operaciones con los números enteros.

## 13. La investigación didáctica sobre los números negativos: resumen del estado de la cuestión.

A continuación vamos a concretar la problemática que, a nuestro juicio, queda abierta a partir de la revisión bibliográfica efectuada:

1) En primer lugar, se ha hecho notar que la noción de obstáculo epistemológico ha recibido interpretaciones muy diversas y, en general, bastante alejadas del sentido inicial definido por Brousseau. Además, el entusiasmo que despertó en los primeros momentos fue, posteriormente, sustituido por un cierto escepticismo, dado que su uso no proporcionó los resultados esperados. Esto desató en su momento una controversia sobre las características de su definición y sobre su utilidad para la didáctica, controversia que actualmente sigue sin resolverse. Pero, en último término, incluso para el investigador que no quiera entrar en la polémica, los trabajos sobre la epistemología del número negativo muestran un panorama histórico tan conflictivo a la hora de darles un estatuto matemático claro a dichos números, que se hace difícil aceptar que su enseñanza pueda discutirse sin tener en cuenta su historia y la posible existencia de obstáculos epistemológicos.

En realidad, la noción de obstáculo epistemológico tal como la concibe Brousseau, apenas ha sido utilizada y, como consecuencia, su eficacia como herramienta de investigación didáctica no ha sido contrastada experimentalmente. Por otra parte, tampoco se le han hecho objeciones de tanto peso como para justificar su abandono o sustitución por una noción diferente. Además, el término sigue de actualidad y, pese a la atribución de diversos significados, aparece con una cierta frecuencia en trabajos de distinta índole.

Por otro lado, el desacuerdo sobre la definición del término 'obstáculo epistemológico' se traduce, como no podía ser menos, en una falta de unanimidad a la hora de decidir cuándo y cómo queda probada su existencia. Los métodos de determinación de obstáculos, tanto en la historia de las matemáticas como en los alumnos actuales, no están claramente definidos y existen serias discrepancias respecto a su validez probatoria. Todas estas razones avalan la necesidad de profundizar en la caracterización de la noción y de analizar con más precisión las ventajas o inconvenientes que su uso aporta a la investigación didáctica.

2) Como ya sabemos, desde 1981 existe una propuesta de Glaeser sobre posibles obstáculos en la historia de los números negativos que, según el autor, debieran ser tenidos en cuenta en la enseñanza actual de dicha noción. Esa propuesta ha recibido comentarios a favor o en contra por parte de diferentes investigadores pero ninguno de ellos aporta pruebas que justifiquen la definitiva conclusión del tema. En estos momentos, no hay acuerdo sobre la existencia o no de obstáculos en la historia de los números negativos, ni sobre cuáles son éstos, supuesto que existan.

Donde sí parece haber una cierta coincidencia de opiniones es en el hecho de considerar que la concepción del 'número como medida' es un obstáculo histórico, responsable, por lo menos en parte, de las dificultades habidas en la comunidad matemática para asumir los números negativos y detectable en la enseñanza actual. Sin embargo, a pesar de que son bastantes los autores que dan por supuesto ese obstáculo y de que algunos de ellos lo han descrito someramente, nadie ha explicado con detalle en qué consiste, cómo se manifiesta, qué efectos produce, etc.; da la impresión de que se ha convertido en un lugar común que se asume sin mayor reflexión sobre el tema.

3) La determinación de obstáculos en la historia de las matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico si se constata su pervivencia en la enseñanza actual y, en particular, en los alumnos actuales. Sin embargo, no existen apenas investigaciones que relacionen las concepciones de los alumnos sobre los números negativos con las investigaciones sobre obstáculos en la historia de dichos números. Es más, de hecho apenas existen trabajos sobre errores de los alumnos que se analicen en términos de concepciones. La mayor parte de los cuestionarios realizados hacen preguntas muy puntuales y elementales y no permiten relacionar entre sí los diferentes errores, ni tampoco relacionar las conclusiones que se obtienen del análisis de unos u otros cuestionarios. Sólo unos pocos autores analizan los errores de los alumnos en términos de concepciones

u obstáculos, pero sus deducciones no han sido confirmadas ni rechazadas por ninguna investigación posterior.

4) Ya se ha dicho anteriormente que la mayor parte de la literatura didáctica sobre los números negativos se dedica a hacer propuestas de enseñanza y que, además, defiende la opción de comenzar por el número entero, presentándolo a través de modelos concretos de neutralización o desplazamiento. Esta opinión ha tenido, como era de esperar, su influencia en el sistema educativo y, hoy en día, lo único que diferencia a unos libros de texto de otros son los modelos concretos que proponen para introducir el número entero. Ahora bien, como ya hemos comentado, existen serias sospechas de que este uso de modelos concretos puede contribuir a reforzar posibles obstáculos epistemológicos, en vez de ayudar a superarlos. Si esto fuera cierto, obligaría a un replanteamiento de la enseñanza de los números negativos sobre supuestos totalmente diferentes de los hasta ahora considerados. Sin embargo, la posibilidad de que el uso de modelos concretos contribuya a reforzar algún obstáculo epistemológico no ha sido estudiada en profundidad y, desde luego, la bibliografía que se dedica a buscar y proponer esos modelos, se desentiende de ella o la desconoce.

Pero este desconocimiento de la conexión que pueda existir entre modelo concreto y obstáculo epistemológico es un indicio de una ignorancia más general. En realidad, no existen prácticamente investigaciones que relacionen, en el caso de los números negativos, el estado de conocimientos de los alumnos con la enseñanza recibida. Lo poco que se sabe sobre concepciones y obstáculos en los alumnos no incluye la contestación a preguntas como: ¿cuáles son las situaciones de enseñanza que han producido esas concepciones?, ¿bajo qué contrato didáctico se han desarrollado?, ¿qué concepciones transmiten los libros de texto y los profesores?, ¿cuál es su relación con las concepciones de los alumnos?, etc.

Por último, los estudios epistemológicos sobre el número negativo ponen de manifiesto que la génesis escolar actual de la noción difiere grandemente de la génesis histórica. Por ejemplo, hoy en día se introduce en el ámbito de la aritmética, ligado a la necesidad de modelizar determinadas situaciones del mundo sensible, cuando, históricamente, las condiciones de necesidad que forzaron su uso y posterior aceptación se encuentran en el álgebra, sobre todo en la teoría de ecuaciones algebraicas, y son, por tanto, necesidades internas de las matemáticas. Además, se comienza simetrizando aditivamente $\mathbf{N}$, aun cuando los alumnos están familiarizados con $\mathbf{Q}^+$, mientras que lo que se observa en cada momento histórico es la simetrización aditiva del conjunto de números positivos entonces considerado. Esto plantea una serie de interrogantes respecto a la transposición didáctica actual, al por qué de sus características, a cuáles son las restricciones a las que se ha visto sometida, etc., que no han sido contestados. De hecho, en la mayor parte de los trabajos que proponen nuevas secuencias didácticas se acepta, sin ningún tipo de discusión, el punto de partida de la simetrización de **N** y su justificación en el ámbito aritmético por necesidades externas a las matemáticas y no existen artículos en los que se analice una introducción de los números negativos a partir del álgebra y, todavía menos, que estudien todo el campo de elecciones didácticas posibles, sin restricciones previas.

## 14. Referencias bibliográficas


ALSINA, C. y otros (1980), *Didáctica dels nombres enters a EGB,* A.A.P.S.A. Rosa Sensat, Barcelona.

ANTIBI, A. y BROUSSEAU, G. (2000), 'La dé-transposition de connaissances scolaires', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 7-40.

ARCAVI, A. y BRUCKHEIMER, M. (1981), 'How Shall We Teach the Multiplication of Negative Numbers?', *Mathematics in School*, 10(5), 31-33.

ARTIGUE, M. (1990), 'Epistémologie et didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 241-286.

AZE, I. (1989), 'Negatives. For Little Ones?', *Mathematics in School*, marzo, 16-17.

BACHELARD, G. (1986), *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie Philosophique J. Vrin, París; edición original: 1938.

BALDINO, R.R. (1996), 'Las cuatro operaciones con enteros a través de juegos', *Uno*, 7, 37-59.

BARTOLINI, P. (1976), 'Addition and Subtraction of Directed Numbers', *Mathematics Teaching*, 74, 34-35.

BATTISTA, M.T. (1983), 'A Complete Model for Operations on Integers', *The Arithmetic Teacher*, 30(5), 26-31.

BELL, A. (1982), 'Looking at children and directed numbers', *Mathematics Teaching*, 100, 66-72.

BELL, A. (1986), 'Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros', *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

BORBA, R.E. (1995), 'Understanding and operations with integers: difficulties and obstacles', *Proceedings of the 19th International Conference of PME,* Brasil, vol. 2, 226-231.

BROOKES, B. (1969), 'How do you teach minus minus is a plus?', *Mathematics Teaching*, 45, 46-49.

BROWN, S.I. (1969), 'Signed Numbers: A "Product" of Misconceptions', *The Mathematics Teacher*, 62(3), 183-195.

BROUSSEAU, G. (1983), 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

BROUSSEAU, G. (1989), 'Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 41-63.

BRUNO, A. (1997), 'La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación', *Números*, 29, 5-18.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994), 'La recta en el aprendizaje de los números negativos', *Suma* 18, 39-48.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1996), 'Números negativos: sumar = restar', *Uno*, 10, 123-133.

CABLE, J. (1971), 'The ground from which directed numbers grow', *Mathematics in School*, 1(1), 10-12.

CARNOT, L.N.M. (1803), *Géométrie de position*, J.B.M. Duprat, Libraire pour les Mathématiques, París.

CARPENTER, T.P. y MOSER, J.M. (1982), 'The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills'. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, 9-24.

CARR, K. y KATTERNS, B. (1984), 'Does the Number Line Help?', *Mathematics in School*, 13(4), 30-34.

CARRAHER, T.N. (1990), 'Negative numbers without the minus sign', *Proceedings of the 14th International Conference of PME*, México, 223-230.

CASTELNUOVO, E. (1970), *Didáctica de la matemática moderna*, Editorial F. Trillas, México; edición original: 1963.

CEMEN, P.B. (1993), 'Adding and Subtracting Integers on the Number Line', *The Arithmetic Teacher*, 40(7), 388-389.

CHANG, L. (1985), 'Multiple Methods of Teaching the Addition and Subtraction of Integers', *The Arithmetic Teacher*, 33(4), 14-19.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori, Barcelona.

CHILVERS, P. (1985), 'A Consistent Model for Operations on Directed Numbers', *Mathematics in School*, 14(1), 26-28.

CID, E. (2000): 'Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos', *Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM*, 10.

CID, E. (2002), 'Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos'. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Zaragoza, vol. 2, 529-542.

COFMAN, J. (1981), 'Operations with Negative Numbers', *Mathematics Teaching*, 94, 18-20.

COLTHARP, F.L. (1966), 'Introducing the Integers as Ordered Pairs', *School Science and Mathematics*, 66(5), 277-282.

COOKE, M.B. (1993), 'A Videotaping Project to Explore the Multiplication of Integers', *The Arithmetic Teacher*, 41(3), 170-171.

COQUIN-VIENNOT, D. (1985), 'Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hierarchie de conceptions a propos des relatifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(2/3), 133-192.

COTTER, S. (1969), 'Charged particles: a model for teaching operations with directed numbers', *The Arithmetic Teacher*, 16(5), 349-353.

CROWLEY, M.L. y DUNN, K.A. (1985), 'On Multiplying Negative Numbers', *The Mathematics Teacher*, 78(4), 252-56.

DAVIDSON, P.M. (1987), 'How should non-positive integers be introduced in elementary mathematics', *Proceedings of the 11th International Conference of PME*, Montreal, vol. 2, 430-436.

DAVIS, R.B. y MAHER, C.A. (1997), 'How Student Think: The Role of Representations'. En L.D. English (ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, 93-115.

DELL'AQUILA, G. y FERRARI, M. (1995), 'La lunga storia dei numeri interi relativi', *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 18A(4), 340-363.

DIEUDONNÉ, J. (1987), *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, París.

DUBISCH, R. (1971), 'A 'Proof' that (-)(-)=+', *The Mathematics Teacher*, 64(8), 750.

DUROUX, A. (1982), *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*, memoria de DEA, Publications de l' IREM, Burdeos.

ERNEST, P. (1985), 'The number line as a teaching aid', *Educational Studies in Mathematics*, 16(4), 411-424.

ETTLINE, J.F. y SMITH, L.M. (1978), 'Flipping over Numbers', *Teacher*, 96(4), 54-55.

EUCLIDES (1991-1994), *Elementos*, 2 vols., Editorial Gredos, Madrid.

FISCHBEIN, E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

FLETCHER, T.J. (1976), 'Talking of Directed Numbers', *Mathematical Education for Teaching*, 2(3), 3-13.

FRANK, C. (1969), 'Play shuffleboard with negative numbers', *The Arithmetic Teacher*, 16(5), 395-397.

FREUDENTHAL, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

FREUDENTHAL, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

GADANIDIS, G. (1994), 'Deconstructing Constructivism', *The Mathematics Teacher*, 87(2), 91-97.

GALBRAITH, M.J. (1974), 'Negative numbers', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 5(1), 83-90.

GALLARDO, A. (1994), 'Negative numbers in algebra. The use of a teaching model', *Proceedings of the 18th International Conference of PME*, Lisboa, vol. 2, 376-383.

GALLARDO, A. (1996), 'Qualitative analysis in the study of negative numbers', *Proceedings of the 20th International Conference of PME*, Valencia, vol. 2, 377-384.

GALLARDO, A. (2002), 'The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra', *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192.

GARDNER, M. (1977), 'Mathematical Games. The concept of negative numbers and the difficulty of grasping it', *Scientific American*, 236(6), 131-135.

GASCÓN, J. (1993), 'Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), 295-332.

GLAESER, G. (1981), 'Epistémologie des nombres relatifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

GOBIN, C. y otros (Groupe 1er cycle) (1996), *Les nombres relatifs au collège*, IREM de Poitiers.

GONZÁLEZ ALBA, J. y otros (1989), 'Aproximación a los números enteros a partir de una escalera', *Suma*, 2, 29-33.

GONZÁLEZ MARÍ, J.L. (1995), *El campo conceptual de los números naturales relativos*, tesis doctoral, Universidad de Granada.

GRUP ZERO (1980), *Els nombres enters*, ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

HAEGEL, S. (1992), *Les nombres negatifs ont une histoire*, IREM de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.

HANKEL, H. (1867), *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, Leopold Voss, Leipzig.

HATIVA, N. y COHEN, D. (1995), 'Self Learning of Negative Number Concepts by Lower Division Elementary Students through Solving Computer-Provided Numerical Problems', *Educational Studies in Mathematics*, 28(4), 401-431.

HAVENHILL, W.P. (1969), 'Though this be madness,…', *The Arithmetic Teacher*, 16(8), 606-608.

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1991), 'Negative Numbers: Obstacles in Their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs', *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 26-32.

HERCOVICS, N. y LINCHEVSKI, L. (1994), 'A cognitive gap between arithmetic and algebra', *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.

HITCHCOCK, A.G. (1997), 'Teaching the negatives, 1870-1970: a medley of models', *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 17-25, 42.

HOLLIS, L.Y. (1967), 'Multiplication of integers', *The Arithmetic Teacher*, 14(7), 555-556.

HUMAN, P. y MURRAY, H. (1987), 'Non concrete approaches to integer arithmetic', *Proceedings of the 11th International Conference of PME*, Montreal, vol. 2, 437-443.

IRIARTE, M.D., JIMENO, M. y VARGAS-MACHUCA, I. (1991), 'Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros', *Suma*, 7, 13-18.

JANVIER, C. (1983), 'The understanding of directed numbers', *Proceedings of the 15th Annual Conference of the North American Chapter of PME*, Montreal, 295-300.

JENCKS, S.M. y PECK, D.M. (1977), 'Hot and Cold Cubes', *The Arithmetic Teacher*, 24(1), 70-71.

JOHNSON, D.R. (1986), 'Making -x Meaningful', *The Mathematics Teacher*, 79(7), 507-510.

KLEIN, F. (1927), *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, vol 1, traducción de Roberto Araujo, Madrid; edición original: 1924.

KOHN, J.B. (1978), 'A Physical Model for Operations with Integers', *The Mathematics Teacher*, 71(9), 734-736.

KÜCHEMANN, D. (1980), 'Children's Understanding of Integers', *Mathematics in School*, 9, 31-32.

KÜCHEMANN, D. (1981), 'Positive and negative number'. En Hart, K.M. (ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, John Murray, Londres, 82-87.

LAY-YONG, L. y TIAN-SE, A. (1987), 'The earliest negative numbers: how they emerged from a solution of simultaneous linear equations', *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 37, 222-262.

LIEBECK, P. (1990), ‘Scores and Forfeits - An Intuitive Model for Integer Arithmetic’, *Educational Studies in Mathematics*, 21(3), 221-239.

LINCHEVSKI, L. y WILLAMS, J. (1999), ‘Using intuition from everyday life in ‘filling’ the gap in children’s extension of their number concept to include the negative numbers’, *Educational Studies in Mathematics*, 39, 131-147.

LIZCANO, E. (1993), *Imaginario colectivo y creación matemática*, Editorial Gedisa, Barcelona.

LÉONARD, F. y SACKUR, C. (1990), ‘Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche’, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 205-240.

LUTH, L.M. (1967), ‘A model for arithmetic of signed numbers’, *The Arithmetic Teacher*, 14(3), 220-222.

LYTLE, P.A. (1994), ‘Investigation of a model based on the neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction’, *Proceedings of the 18th International Conference of PME*, Lisboa, vol. 3, 192-199.

McAULEY, J. (1990), ‘Please Sir, I Didn’t Do Nothin’, *Mathematics in School*, 19(1), 45-47.

MALPAS, A.J. (1975), ‘Subtraction of negative numbers in the second year: anatomy of a failure’, *Mathematics in School*, 4(4), 3-5.

MARTHE, P. (1979), ‘Additive problems and directed numbers’, *Proceedings of the 3th International Conference of PME*, Warwick, 153-157.

MILAZZO, F. y VACIRCA, V. (1983), ‘La struttura moltiplicativa dei numeri relativi: osservazioni storico-didattiche’, *Archimede*, 35(1/2), 78-83.

MILNE, E. (1969), ‘Disguised practice for multiplication and addition of directed numbers’, *The Arithmetic Teacher*, 16(5), 397-398.

MORO, E. y SALAZAR, S. (1993), ‘Los números enteros’, *Zeus*, 19, 25-28.

MUKHOPADHYAY, S. (1997), ‘Story telling as sense-making: children’s ideas about negative numbers’, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 5, 35-50.

MUKHOPADHYAY, S., RESNICK, L.B. y SCHAUBLE, L. (1990), ‘Social sense-making in mathematics; children’s ideas of negative numbers’, *Proceedings of the 14th International Conference of PME*, México, 281-288.

MURRAY, J.C. (1985), ‘Children’s informal conceptions of integer arithmetic’, *Proceedings of the 9th International Conference of PME*, Utrecht, vol.1, 147-153.

NCTM (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS) (1970), *El sistema de los números enteros*, Editorial F. Trillas, México; edición original: 1968.

PAPY, G. (1968), *Minicomputer*, Papy et IVAC, Bruselas.

PEACOCK, G. (1830), *A treatise on algebra*, J. & J.J. Deighton, Cambridge.

PELED, I. (1991), ‘Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability’, *Proceedings of the 15th International Conference of PME*, Assisi (Italia), 145-152.

PETERSON, J.C. (1972), ‘Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (-1)x(-1)=(+1)’, *The Arithmetic Teacher*, 19(5), 396-403.

PETRI, A. (1986), ‘Arithmos’, *Números*, 14, 19-46.

PHILLIPS, E.R. (1971), ‘Negative Number x Negative Number Gives Positive Number: An Understandable Proof for High School Students’, *School Science and Mathematics*, 71(9), 797-800.

PUIG ADAM, P. (1956), *Didáctica matemática eurística*, Publicaciones de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, Madrid.

PYCIOR, H.M. (1981), 'George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra', *Historia Mathematica*, 8, 23-45.

ROSSINI, R. (1986), 'A propos des nombres relatifs', *Math-Ecole*, 121, 18-23.

ROWLAND, T. (1982), 'Teaching directed numbers. An experiment', *Mathematics in School*, 11(1), 24-27.

SÁNCHEZ OLMEDO, E. (1991), 'Introducción al número negativo a través del análisis de juego de problemas creativos y de fenómenos de azar', *Epsilon*, 19, 55-58.

SARVER, V.T. (1986), 'Why does a negative times a negative produce a positive?' *The Mathematics Teacher*, 79(3), 178-183.

SASAKI, T. (1993), 'The constructing meanings by social interaction in mathematical teaching', *Proceedings of the 17th International Conference of PME,* Tsukuba (Japón), vol. 2, 262-268.

SCHUBRING, G. (1986), 'Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs', *Petit x*, 12, 5-32.

SEMADENI, Z. (1984), 'A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts', *Educational Studies in Mathematics*, 15(4), 379-395.

SESIANO, J. (1985), 'The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics', *Archive for History of Exact Science*, 32(2), 105-150.

SICKLICK, F.P. (1975), 'Patterns in Integers', *The Mathematics Teacher*, 68(4), 290-292.

SIERPINSKA, A. (1989), 'Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 130-147.

SKEMP, R.R. (1980), *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, Ediciones Morata, Madrid.

SNELL, K.S. (1970), 'Integers. Introduction of directed numbers', *The Mathematical Gazette*, 54(388), 105-109.

SORIA, P. (1997), 'Manipulamos los números enteros', *Epsilon*, 13(37), 57-66.

SOUZA, A.C.C. de y otros (1995), 'Games for integers: conceptual or semantic fields?', *Proceedings of the 19th International Conference of PME*, Brasil, vol. 2, 232-239.

SPAGNOLO, F. (1986), 'L'intervento della nozione di operatore negli ampliamenti numerici', *L'educazione Matematica*, 1(2), 169-185.

STREEFLAND, L. (1996), 'Negative Numbers: Reflections of a Learning Researcher', *Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 57-77.

THOMAIDIS, Y. (1993), 'Aspects of Negative Numbers in the Early 17th Century. An Approach for Didactic Reasons', *Science & Education*, 2, 69-86.

THOMPSON, P.W. y DREYFUS, T. (1988), 'Integers as Transformations', *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 115-133.

TULEJ, J. y GORMAN, M. (1990), 'Mathematics and Drama', *Mathematics Teaching*, 131, 2-6.

VARGAS-MACHUCA, I. y otros (1990), Números enteros, *Editorial Síntesis*, Madrid.

VERGNAUD, G. (1989), 'L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 76-83.

VERGNAUD, G. y DURAND, C. (1976), 'Structures additives et complexité psychogénétique', *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

WHIFFING, P. (1989), 'A Directed Number Starter', *Micromath*, 5(1), 14-15.

WHITMAN, N. (1992), 'Multiplying Integers', *The Mathematics Teacher*, 85(1), 34-51.